ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS.
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

• • •

CONCOURS D'ADMISSION 1986

• • •

MATHÉMATIQUES
2-ème ÉPREUVE
OPTION P'
(Durée 4 heures)

Un corrigé

PARTIE I

1. • Soient f et g deux éléments de $\mathscr{S}$. Pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la formule de Leibniz, on a :

$$x^p (fg)^{(q)}(x) = x^p \sum_{k=0}^{q} \mathtt{C}_q^k f^{(k)}(x) g^{(q-k)}(x) = \sum_{k=0}^{q} \mathtt{C}_q^k x^p f^{(k)}(x) g^{(q-k)}(x)$$

Or $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p f^{(k)}(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} x^0 g^{(q-k)}(x) = 0$, ceci implique que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p (fg)^q(x) = 0$, donc $fg \in \mathscr{S}$.

• Soit $f_t(x) = \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right)$. Calculons, pour $q \in \mathbb{N}$, $f_t^{(q)}(x)$. On a $f_t'(x) = (t-x) f_t(x)$ puis on montre par récurrence sur q que $f_t^{(q)}(x) = P_t(x) f_t(x)$ où P_t est un polynôme en x, donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \ x^p f_t^{(q)}(x) = x^p P_t(x) \exp\left(\frac{-1}{2}(x-t)^2 + \frac{t^2}{2}\right),$$

d'où

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p f_t^{(q)}(x) = 0,$$

donc $f_t \in \mathscr{S}$ et par suite $\mathscr{S}$ est un sous-algèbre de $\mathscr{C}^\infty$ non réduit à $\{0\}$.

• Il est clair que les applications U, V et H sont des applications linéaires de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{C}^\infty$. De plus si $f \in \mathscr{S}$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p (Uf)^{(q)}(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p (Vf)^{(q)}(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p (Hf)^{(q)}(x) = 0$ (vérification immédiate), donc U, V et H sont en fait des endomorphismes de $\mathscr{S}$.

Soit $f \in \mathscr{S}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(V \circ U)(f)(x) &= V(Uf)(x) \\
&= x(Uf)(x) - (Uf)'(x) \\
&= x\left(xf(x) + f'(x)\right) - \left(xf(x) + f'(x)\right)' \\
&= x^2 f(x) - f''(x) - f(x) \\
&= (Hf - f)(x)
\end{aligned}$$

D'où $\forall f \in \mathscr{S}$, $(V \circ U)(f) = (H - Id)(f)$, donc $V \circ U = H - \mathrm{Id}$.

2. Si $f \in \mathscr{S}$, $\lim_{|x|\to+\infty}(1+x^2)x^p f^{(q)}(x) = 0$ ce qui entraîne l'existence d'un réel $A > 0$ tel que $|x| \geq A$ on a $\left|(1+x^2)x^p f^{(q)}(x)\right| \leq 1$. Sur le segment $[-A, A]$, la fonction $x \mapsto (1+x^2)x^p f^{(q)}(x)$ est continue, donc bornée et par conséquent il existe $N_{p,q} > 0$ tel que $\forall x \in [-A, A]$, $\left|(1+x^2)x^p f^{(q)}\right| \leq N_{p,q}$. Ainsi pour $M_{p,q} = \max(1, N_{p,q})$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|x^p f^{(q)}(x)\right| \leq \dfrac{M_{p,q}}{1+x^2}$.

3. • Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors f^2 et fg sont aussi dans $\mathscr{S}$, et d'après la question précédente il existe des constantes positives $M(f)$ et $M(f,g)$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^2(x)| \leq \frac{M(f)}{1+x^2}, \quad |f(x)g(x)| \leq \frac{M(f,g)}{1+x^2}$$

donc f^2 et fg ont des intégrales absolument convergentes sur $\mathbb{R}$.

• Si $f \in \mathscr{S}$, alors $\overline{f} \in \mathscr{S}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, par conséquent l'application

$$(f,g) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x$$

est bien définie sur $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$.

D'autre part on peut vérifier facilement, en utilisant la linéarité de l'intégrale et les propriétés des nombres complexes, que cette application est une forme hermitienne définie positive.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit $|(f|g)| \leq (f|f)^{\frac{1}{2}}(g|g)^{\frac{1}{2}}$ ou encore

$$|I_1| \leq \sqrt{I_2}\sqrt{I_3}.$$

4. • Soient f et g de $\mathscr{S}$, on a, à l'aide d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
(Uf|g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{xf(x) + f'(x)}g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}xg(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f'(x)}g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}xg(x)\mathrm{d}x + \Big[\overline{f(x)}g(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g'(x)\mathrm{d}x \\
&= (f|Vg)
\end{aligned}$$

$\Big[\overline{f(x)}g(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, car si $f \in \mathscr{S}$, $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. De même on montre que $(Vf|g) = (f|Ug)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
(Hf|g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x^2 f(x) - f''(x)}g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}x^2 g(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f''(x)}g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}x^2 g(x)\mathrm{d}x - \Big[\overline{f'(x)}g(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f'(x)}g'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}x^2 g(x)\mathrm{d}x + \Big[\overline{f(x)}g'(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g''(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}x^2 g(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g''(x)\mathrm{d}x \\
&= (f|Hg)
\end{aligned}$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de H, alors il existe $f \in \mathscr{S}$ non nul tel que $H(f) = \lambda f$ et donc

$$(Hf|f) = (\lambda f|f) = \overline{\lambda}(f|f)$$

et on a aussi $(Hf|f) = (f|Hf) = \lambda(f|f)$ et comme f est non nul alors $\overline{\lambda} = \lambda$, donc λ est un réel.

PARTIE II

1. Comme dans la question **1.**, on a montré que $u_t \in \mathscr{S}$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(u_t|u_t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a(t))^2 \exp\left[2\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\right] \mathrm{d}x \\
&= (a(t))^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(x^2 - 2tx + t^2 - t^2\right)\right] \mathrm{d}x \\
&= (a(t))^2 \exp(t^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(x-t)^2\right] \mathrm{d}x \\
&= (a(t))^2 \exp(t^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2)\mathrm{d}x, \quad u = x - t \\
&= \sqrt{\pi}(a(t))^2 \exp(t^2)
\end{aligned}$$

Donc si $\|u_t\| = \exp\left(\dfrac{t^2}{4}\right)$ et comme $a(t)$ est positive, alors $a(t) = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\dfrac{t^2}{4}\right)$. On vérifie sans peine que $\forall x \in \mathbb{R}, Uu_t(x) = tu_t(x)$ et que $Vu_t(x) = (2x - t)u_t(x)$.

2. • Pour $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right)$ est dans $\mathscr{S}$, donc si $f \in \mathscr{S}$, $x \mapsto \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right) f(x) \in \mathscr{S}$ ($\mathscr{S}$ stable par produit) et donc admet une intégrale absolument convergente.

• Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
Lu_0(t) &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= a(t) \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= a(t) \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{t^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{t}{2}\right)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}$, $Lu_0(t) = 1$.

• Si $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ alors $u_t(x) \in \mathbb{R}$, donc

$$Lf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x) f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u_t(x)} f(x)\mathrm{d}x = (u_t|f).$$

• Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(L \circ V)(f)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp\left(tx - \frac{x}{2}\right) (xf(x) - f'(x))\mathrm{d}x \\
&= a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x}{2}\right) xf(x)\mathrm{d}x - [u_t(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} u_t'(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x}{2}\right) xf(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} (t - x)u_t(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} tu_t(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= tL(f)(t)
\end{aligned}$$

• En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\left|L(f)(t)\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)\right| &= \left|\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(2tx-x^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\|f\| \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(t^2+2tx-x^2-t^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\|f\| \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\sqrt{\pi}^{\frac{1}{2}}\|f\|
\end{aligned}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|L(f)(t)\exp\left(\frac{-t^2}{4}\right)\right| \leq \|f\|$.

3. • La fonction $(x,t) \mapsto f(x)\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)$ est continue et admet une dérivée partielle par rapport à t : $(x,t) \mapsto xf(x)\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)$ qui est continue sur $[-n,n]\times\mathbb{R}$, ceci entraîne que F_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ F_n'(t) = \int_{-n}^{n} xf(x)\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

• Soit $A>0$. Pour tout $t \in [-A,A]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|F_n'(t)-G(t)| \leq \int_{-\infty}^{-n}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)|xf(x)|\mathrm{d}x + \int_{n}^{+\infty}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)|xf(x)|\mathrm{d}x.$$

Si $x \in]-\infty,-n]$, la fonction $t \mapsto \exp(tx)$ est décroissante sur $[-1,1]$ et donc $\exp(tx) \leq \exp(-Ax)$. De même, si $x \in [n,+\infty[$, $\exp(tx) \leq \exp(Ax)$, d'où :

$$|F_n'(t)-G(t)| \leq \int_{-\infty}^{-n}\exp\left(-Ax-\frac{x^2}{2}\right)|xf(x)|\mathrm{d}x + \int_{n}^{+\infty}\exp\left(Ax-\frac{x^2}{2}\right)|xf(x)|\mathrm{d}x.$$

Le terme à droite tend vers 0 (reste d'une intégrale convergente) indépendamment de $t \in [-A,A]$. Ceci montre que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G sur tout intervalle $[-A,A]$ de $\mathbb{R}$ ($A>0$). De même on montre que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout intervalle $[-A,A]$ de $\mathbb{R}$.

• D'après le théorème du cours et les questions précédentes, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = G$.

4. La linéarité de L découle de celle de l'intégrale. D'après ce qui précède Lf est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(Lf)'(t) &= -\frac{t}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x)f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xu_t(x)f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xu_t(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-x)u_t(x)f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xu_t(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_t'(x)f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xu_t(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x)f'(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xu_t(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x)(Uf)(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

D'où $(Lf)' = \frac{1}{2}(L\circ U)f$. Comme $(Lf)' = \frac{1}{2}L(Uf)$, alors on peut déduire par un raisonnement de récurrence que Lf est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Une vérification immédiate montre que $(L\circ H)f = Lf + 2\mathrm{Id}\times(Lf)'$.

PARTIE III

1. Comme pour tout $t\in\mathbb{R}$, $Lu_0(t) = 1$ et $u_0(t) = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{\frac14} h_0(t)$, alors $Lh_0(t) = \pi^{\frac14}$. D'autre part, on sait que $(L\circ V)h_0(t) = t(Lh_0)(t)$, donc par récurrence, $Lh_n(t) = t^n Lh_0(t)$, d'où $\forall t\in\mathbb{R}$, $Lh_n(t) = \pi^{\frac14}t^n$.

2. • Soit $f\in\mathscr{S}$ telle que $Lf = 0$, comme $a(t) > 0$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x = 0$. On peut vérifier facilement que l'application $t\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x)x^n f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Donc on a montré que $Lf = 0$ entraîne $Lg_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La réciproque est clair, car si $Lg_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, en particulier $Lg_0 = Lf = 0$.

• Posons $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}a_nX^n$, donc

$$\begin{aligned} 0 = L(Ph_0)(t) &= \sum_{n=0}^{N}a_n\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)x^n h_0(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{N}a_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)h_0(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

D'où $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\sqrt{\pi}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\exp\left(\frac{t^2}{4}\right) = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{t^2}{4}\right)\sum_{n=0}^{N}a_nQ_n(t) = 0$$

avec Q_n un polynôme de degré n, donc $a_n = 0$ pour tout $n\in[\![0,N]\!]$, donc $P = 0$.
• Soit $f\in E$ et P un polynôme tel que $f = Ph_0$. Si $Lf = 0$, alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $Lf(t) = 0$ et donc $P = 0$ d'après la question précédente, d'où $f = 0$ et donc L est injective sur E.

3. et 4. La solution générale de l'équation différentielle $2ty' + y = \lambda y$ est de la forme $y(t) = k|t|^{\frac{\lambda-1}{2}}$ où k est une constante réelle. Pour que cette solution soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ il faut que $\dfrac{\lambda-1}{2}\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire λ est de la forme $2n+1$ avec $n\in\mathbb{N}$.
Soit λ une valeur propre de H, alors il existe $f\in\mathscr{S}$ non nul tel que $Hf = \lambda f$, la question **5.** de la partie **II** montre que Lf est solution de l'équation différentielle $2ty' + y = \lambda y$, comme Lf est $\mathscr{C}^\infty$, alors il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\lambda = 2n+1$. Donc $t(Lf)'(t) = nLf(t)$, d'où $Lf(t) = kt^n$, $k\in\mathbb{R}$. Il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $L(\alpha f)(t) = \pi^{\frac14}t^n$.
Si $f\in E$, alors $L(\alpha f)(t) = Lh_n(t)$ et donc $\alpha f = h_n$, donc $f\in\mathrm{Vect}(h_n)$.

• • • • • • • • • •